ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1984

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Le problème fait intervenir des intégrales de fonctions à valeurs complexes sur les intervalles non bornés $[\ 0, +\infty\ [$ et $[\ 1, +\infty\ [$. Si φ est une fonction complexe définie et continue sur $[\ 1, +\infty\ [$ telle que l'intégrale $\int_1^X \varphi(t)\,dt$ admette une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque le réel $X \geqslant 1$ tend vers $+\infty$, on note cette limite $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ et on dit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge ; si de plus l'intégrale $\int_1^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$ converge, on dit que $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge absolument. Des définitions analogues et le même vocabulaire sont employés pour le cas des fonctions complexes définies et continues sur $]\ 0,1\ ]$, lorsque la variable tend vers 0. On rappelle, sans en demander aucune démonstration, que les intégrales convergentes ainsi définies ont les mêmes propriétés opératoires que les intégrales de fonctions à valeurs réelles, et que leur convergence absolue entraîne leur convergence.

D'autre part, on note Ω l'ouvert complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des réels positifs ou nul et Ω' l'ensemble $\Omega \cup \{\ 0\ \}$ complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des réels strictement positifs.

I

1 - Soit φ une fonction à valeurs complexes définie et continue sur $[\ 1, +\infty\ [$, et soit (z_1, z_2) un couple quelconque de points de Ω' .

a. Montrer que la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ équivaut à la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\frac{t - z_1}{t - z_2}\,dt$.

b. Etablir la même équivalence entre les convergences de ces intégrales (on pourra utiliser une intégration par parties).

2 - *Dans toute la suite du problème*, $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions f à valeurs complexes, définies et continues sur $]\ 0, +\infty\ [$ et telles que, de plus, les intégrales $\int_0^1 |f(t)|\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ convergent toutes deux.

. . . / . . .

a. Si une fonction $f \in \mathcal{F}$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque la variable tend vers $+\infty$, quelle est la valeur de ℓ ?

b. Chacune des fonctions $f \in \mathcal{F}$ qui sont à valeurs réelles positives ou nulles est-elle bornée sur $[1, +\infty[$?

c. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge sans converger absolument.

d. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in \Omega$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt$ converge.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on définit ainsi sur Ω une fonction g à valeurs complexes par

$$g(z) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt .$$

On notera désormais $T(f)$ cette fonction g et $\mathcal{G} = T(\mathcal{F})$ l'ensemble de ces fonctions g, c'est-à-dire l'image de $\mathcal{F}$ par l'application T.

3 - Soit $f_1 \in \mathcal{F}$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, et soit $\zeta = \xi + i\eta$ un nombre complexe de partie imaginaire η strictement positive. Quelle condition l'hypothèse faite sur η entraîne-t-elle pour la valeur de $z = \zeta^2$ dans $\mathbb{C}$?

Soit $g_1 = T(f_1)$; calculer $g_1(z)$ en fonction de ζ.

II

Soit ρ un nombre réel au moins égal à 1. On désigne par Ω_ρ la partie de Ω constituée des points $z = x + iy$ dont la partie réelle x vérifie l'inégalité $x \leqslant \rho\,|\,y\,|$.

1 - Soit $f \in \mathcal{F}$; pour tout réel $a > 0$, on note Φ_a celle des primitives de la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ qui est définie sur $]0, +\infty[$ et nulle pour la valeur a de la variable.

a. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, établir l'existence d'un réel $a_0 > 0$ tel que, pour tout $a \geqslant a_0$ et tout $u \geqslant 0$, Φ_a vérifie l'inégalité $|\,\Phi_a(a+u)\,| \leqslant \varepsilon$.

b. En déduire l'existence d'un réel $a_1 > 0$ tel que pour tout $a \geqslant a_1$ l'intégrale $\int_a^{+\infty} |\,\Phi_a(t)\,\frac{z}{(t-z)^2}\,|\,dt$ soit majorée par ε quel que soit $z \in \Omega_\rho$ (on pourra distinguer deux cas selon le sens de l'inégalité entre les deux nombres $|\,x\,|$ et $\rho\,|\,y\,|$).

c. Montrer que toute fonction $g \in \mathcal{G}$ tend vers 0 lorsque $|\,z\,|$ tend vers $+\infty$, z restant dans Ω_ρ.

d. Montrer par un exemple que pour tout réel $\delta > 0$, il existe une fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que pour tout réel $x > 0$ assez grand, la fonction $g = T(f)$ vérifie $g(-x) \geqslant x^{-\delta}$.

. . . / . . .

2 - ***a.*** Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{G}$, il existe une constante réelle K telle que, pour tout $z \in \Omega_\rho$ de module assez petit, on ait $| g(z) | \leqslant \frac{K}{|z|}$.

b. Montrer par un exemple que pour tout réel $\delta > 0$, il existe une fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que pour tout réel $x > 0$ assez petit, $g = T(f)$ vérifie $g(-x) \geqslant x^{-1+\delta}$.

3 - Soient $f \in \mathcal{F}$, $g = T(f)$ et $z \in \Omega$.

a. Etablir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^2}\, dt$.

b. Pour z fixé dans Ω et z' tendant vers z en restant dans Ω, exprimer à l'aide d'une intégrale la limite de $\frac{g(z') - g(z)}{z' - z}$ et en déduire la continuité de g sur Ω.

III

1 - Soient $f \in \mathcal{F}$ et $z = x + iy \in \Omega$ un nombre complexe de partie réelle $x > 0$, et dont on note $\bar{z} = x - iy$ le conjugué.

a. Trouver, lorsque y tend vers 0, x restant fixe, la limite de l'intégrale

$$\int_{2x}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) dt .$$

b. Résoudre la même question pour les intégrales

$$\int_{2x}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2x} [\, f(t) - f(x) \,] \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) dt .$$

c. Lorsque y tend vers 0 par valeurs positives, x restant fixe, déduire de ce qui précède la limite de $g(z) - g(\bar{z})$, où $g = T(f)$.

d. L'application T est-elle injective ?

2 - Pour tout $z \in \Omega$, on désigne par $\sqrt{z}$ celle des deux racines carrées de z dont la partie imaginaire est strictement positive, et on note h la fonction définie sur Ω par $h(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Si h appartient à $\mathcal{G}$, de quelle fonction $f \in \mathcal{F}$ est-elle l'image par T ? L'hypothèse qui vient d'être faite sur l'appartenance de h à $\mathcal{G}$ est-elle justifiée ?

♦
♦ ♦